

プレートの熱的進化（プレートの年齢と水深・熱流量、ルート則）

- 第1回: ガイダンス (授業の目標、講義内容の概要、授業の評価方法)
- 第2回: 動く大地の発見1 (VLBI、GPS、地形と地質)
- 第3回: 動く大地の発見2 (磁極の移動、海洋底の磁気異常の縞模様)
- 第4回: プレート運動学と3種のプレート境界
- 第5回: 重力異常とアイソスタシー
- 第6回: 中央海嶺と海洋プレート1 (海洋プレートを構成する岩石)
- 第7回: 中央海嶺と海洋プレート2 (地震波・電気抵抗から海洋プレートを探る)
- 第8回: プレートの熱的進化 (プレートの年齢と水深・熱流量、ルート則)
- 第9回: プレート収斂型境界の特徴とプレート収斂速度の法則
- 第10回: 大陸衝突と造山運動 (地震・活断層・火山分布)
- 第11回: ジオハザードと防災1 (ジオハザードとは何か)
- 第12回: 新生代日本列島の進化史 (特に日本海拡大について)
- 第13回: ジオハザードと防災2 (ジオハザードの発生メカニズム)
- 第14回: ジオハザードと防災3 (歴史・先史時代の巨大災害)
- 第15回: ジオハザードと防災4 (地震・津波による災害と対策)

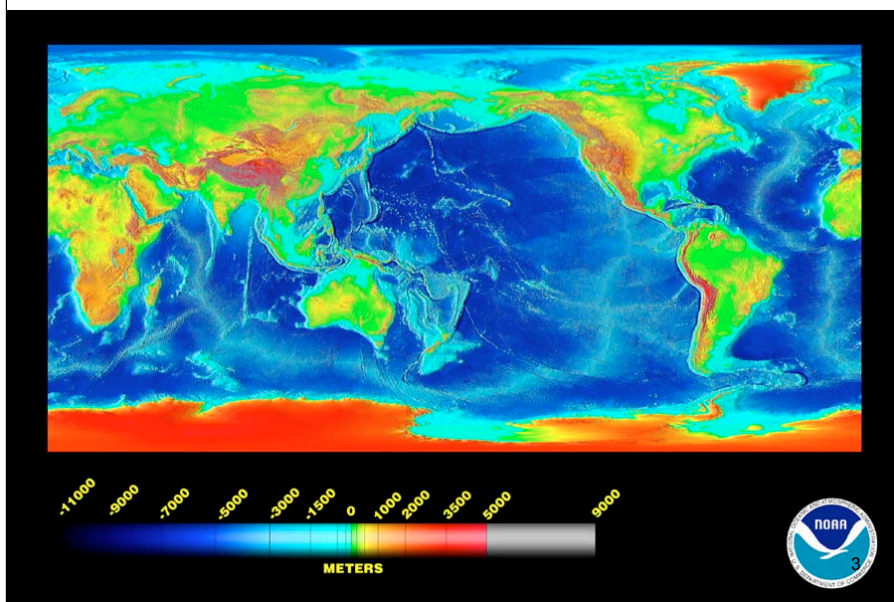
1

本日の流れ

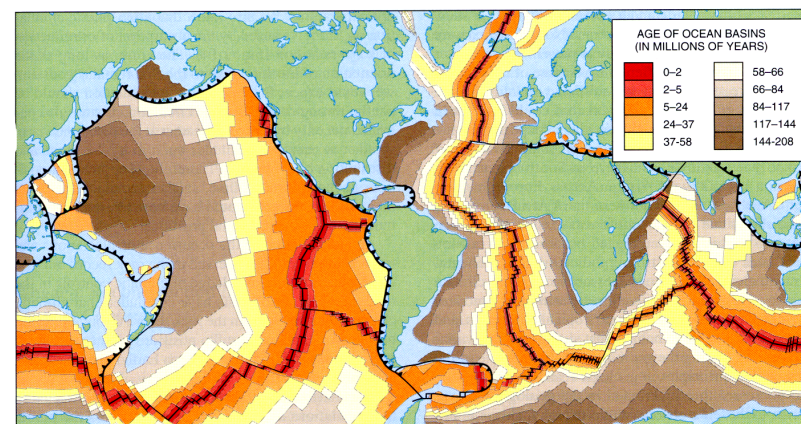
- 海洋底の地形 (年齢とともに変化)
- 熱流量とフーリエの法則
- 熱伝導方程式の解法とルート則
- ケルビン卿による地球の年代の推定
- プレートテクトニクスの駆動力

2

なぜ海底は海嶺軸から遠ざかるにつれ深くなるのか？



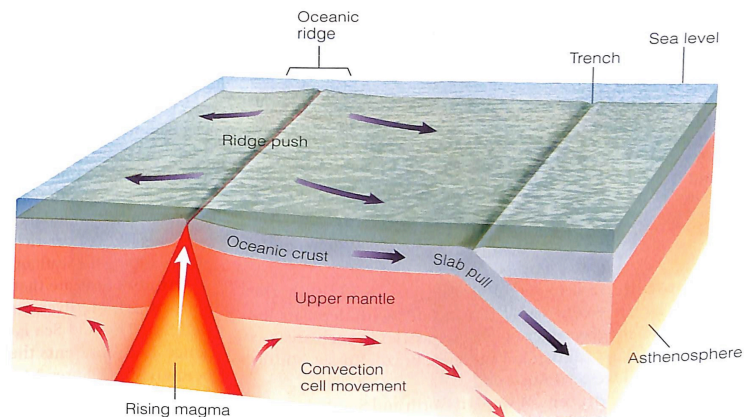
海洋底年齢図の完成



■ FIGURE 7.8 Global map of the age of the ocean floor determined from patterns of magnetic-field intensity.

海洋底磁気異常の探査により、現在では全海洋での海洋底年齢図がほぼ完成している。中央海嶺の中軸部の年齢はゼロ歳で、そこから遠ざかるにつれて海洋底の年齢は増す。現在のどこの海洋底も約2億年より若い。最古の大陸の年齢が46億年だから、海洋底はずっと若い。4

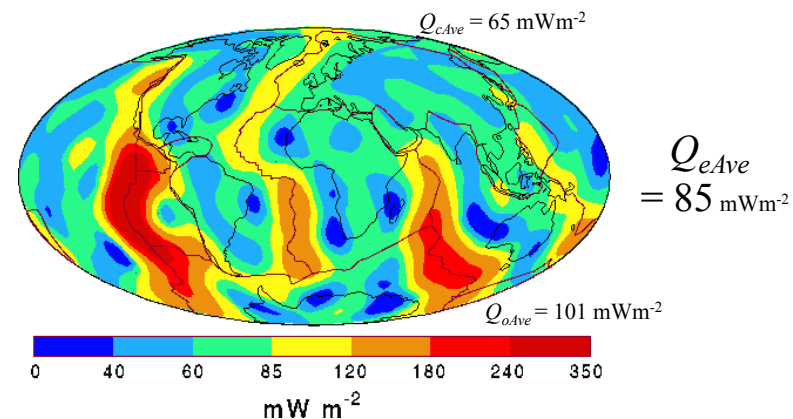
海嶺と沈み込み帯



海嶺での上昇と沈み込み帯での沈降でプレートは移動するのでは？

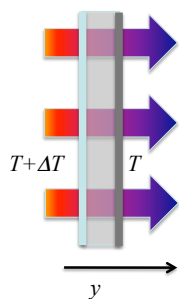
5

全球の熱流量



<http://www.geophysik.rwth-aachen.de/IHFC/heatflow.html>

熱伝導：フーリエの法則



$$q = -K \frac{dT}{dy}$$

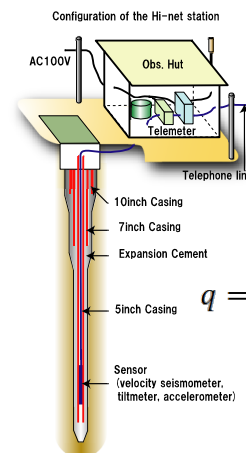
q : 熱流量
単位時間あたり、
単位面積当たりの
熱の流れ

K : 熱伝導係数

代表的な地温勾配1km深度で30°C高くなる ($dT/dy=30\text{K/km}$)

7

熱流量の測定



$$q = -K \frac{dT}{dy}$$

- ボアホールを使った観測から、地温勾配は $dT/dy = 20 \sim 30 \text{ K/km}$ であった。

- 岩石の熱伝導係数を $2 \sim 3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ とすると平均的な熱流量

$$q = 40 \sim 90 \text{ mW m}^{-2}$$

8

問い 全球的な熱流量

- 大陸の地殻熱流量 ($Q_{cAve} = 65 \text{ mWm}^{-2}$) と海洋の地殻熱流量 ($Q_{oAve} = 101 \text{ mWm}^{-2}$) から全球での発熱量 Q_e を計算せよ。
- また得られた Q_e から、地球の全球的な平均熱流量 Q_{eAve} (mWm^{-2}) を計算せよ。

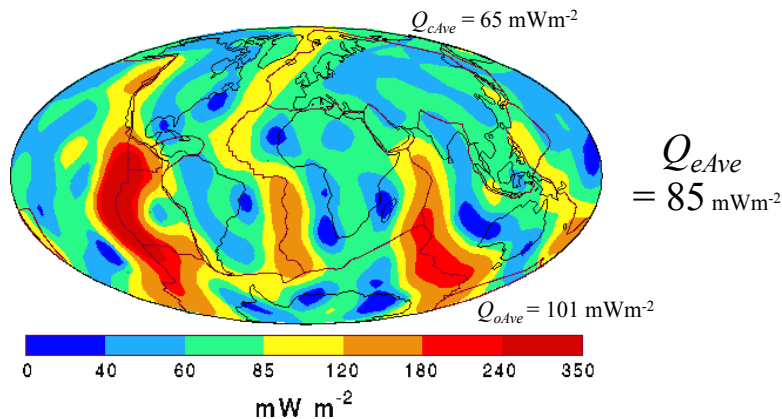
ただし、大陸の面積 $A_c = 2 \times 10^8 \text{ km}^2$ 、海洋の面積 $A_o = 3.1 \times 10^8 \text{ km}^2$ とする。

9

全球的な熱流量 計算してみよう

10

全球の熱流量

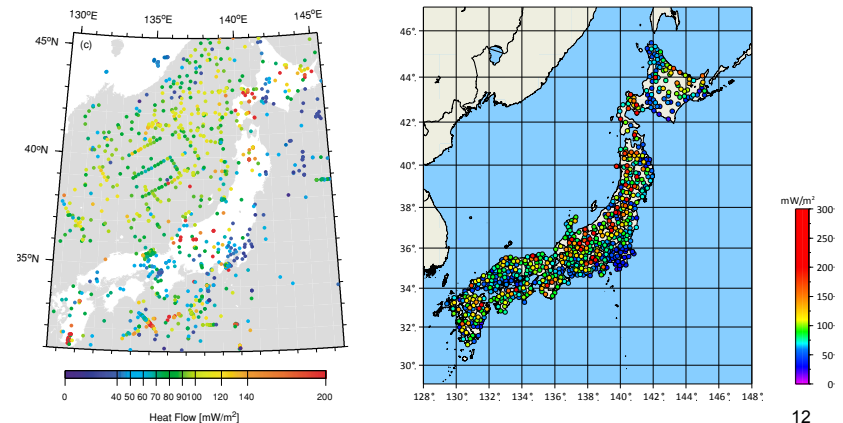


<http://www.geophysik.rwth-aachen.de/IHFC/heatflow.html>

日本列島の地殻熱流量分布

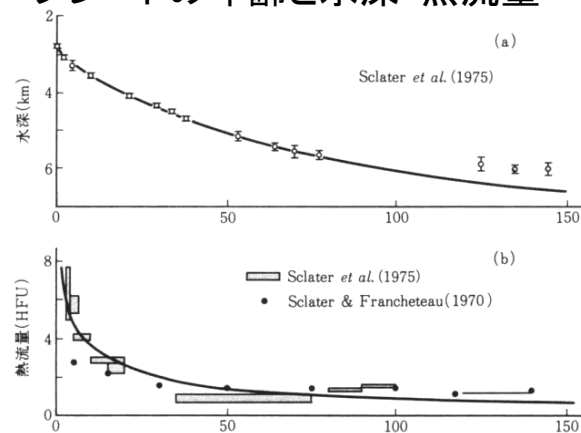
Tanaka et al. (2004EPS) によるコンパイル

Matsumoto (2007) によるコンパイル



12

海洋プレートの冷却によるルートt則 ープレートの年齢と水深・熱流量ー

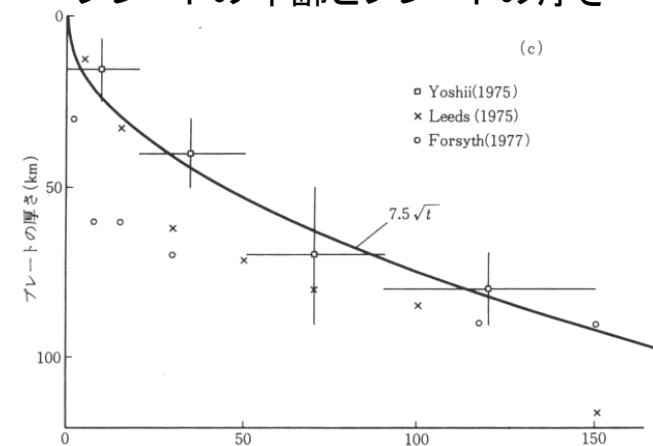


水深はプレートの年齢 t の平方根に比例し、熱流量は t の平方根に逆比例する。

→ プレートの冷却が関係している？

13

海洋プレートの冷却によるルートt則 ープレートの年齢とプレートの厚さー

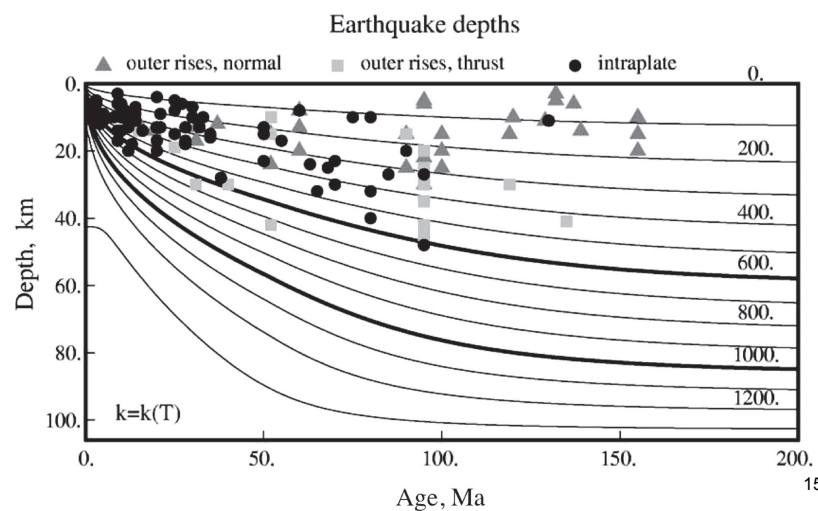


表面波の解析から推定されたプレートの厚さ(海洋底から低速度体までの厚さ) D

と年齢との間には、 $D=7.5t^{1/2}$ の関係がある。

14

海洋プレートの冷却によるルートt則 ー海洋プレート内での地震発生深さー



15

海洋プレートの冷却によるルートt則

・ 海洋プレートの年齢に伴い、

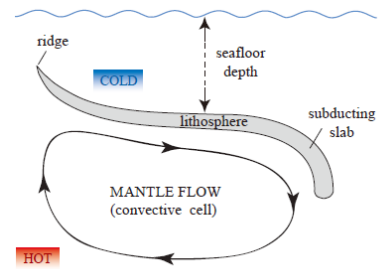
- 1) 海洋底は深くなる
- 2) 熱流量は小さくなる
- 3) 海洋プレートは厚くなる
- 4) 地震の発生深さは深くなる

上記4点の変化は全て、年齢 $t^{1/2}$ に依存する

→ プレートの冷却によって説明できる？

16

海洋プレートの厚さと年代



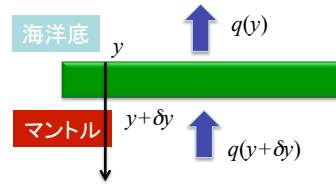
Adam and Vidal 2010 Science

プレート厚さ⇒冷却とともに増える

プレート温度の時間当たりの放熱は、
比熱(ある質量を1℃上昇するためのエネルギー)を c

$$-\rho c \frac{dT}{dt} \delta y$$

熱伝導方程式



$q(y + \delta y) - q(y)$: マントル⇒海底 熱流量

$$\begin{aligned} q(y + \delta y) - q(y) &= \delta y \frac{dq}{dy} \\ &= \delta y \frac{d}{dy} \left[-k \left(\frac{dT}{dy} \right) \right] = \delta y \left[-k \left(\frac{d^2 T}{dy^2} \right) \right] \end{aligned}$$

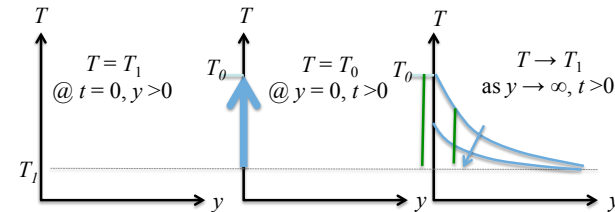
17

熱伝導方程式を解く

$$\frac{\delta T}{\delta t} = K \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \quad (\kappa = \frac{K}{\rho c})$$

温度に関する無次元量: $\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$ 長さに関する無次元量:

熱拡散距離



18

誤差関数と海洋底地温勾配

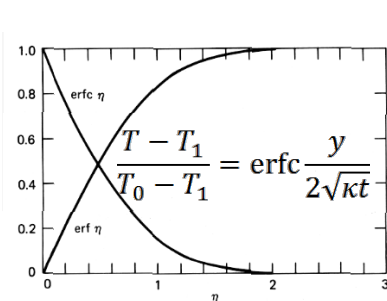
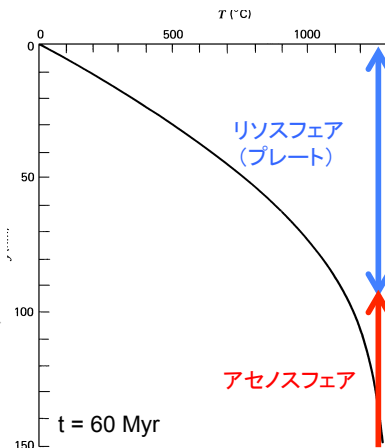


Figure 4-21 The error function and the complementary error function.



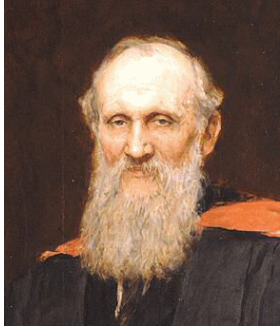
19

20

熱流量から推定する地球の年齢

仮定: 熱い地殻が冷えて現在の地球ができた

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}}$$



ケルビン卿(ウィリアム・トムソン)

フーリエの法則 熱流量

$$q = -K \frac{dT}{dy} \quad \text{より} \quad q = \frac{K(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi \kappa t}}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{(T_1 - T_0)^2}{\pi \kappa (\partial T / \partial y)^2} \rightarrow 2000\text{K}$$

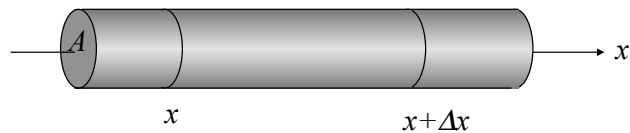
$\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 25 K km^{-1}

21

熱流量から推定する地球の年齢

22

熱伝導方程式の導出



A : 棒の断面積, ρ : 密度, σ : 比熱, K : 熱伝導率

Δt 時間に区間 $(x, x + \Delta x)$ の温度が Δu 上昇したとすると, 熱量の増加は

$$\Delta Q = \sigma \rho A \{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\} \Delta x = \sigma \rho A \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt \Delta x$$

だから, 区間 (x_1, x_2) の熱量の増加 ΔQ_1 は

$$\Delta Q_1 = \sigma \rho A \int_{x_1}^{x_2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx$$

注意) このスライドと次のスライドでは, 温度 u で表される (それ以外は T である) ²³

他方, Δt の間に x_1 からの熱の流入量と x_2 からの流出量の差 ΔQ_2 は

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \left(-K \frac{\partial u}{\partial x} A \right)_{x_1} - \left(-K \frac{\partial u}{\partial x} A \right)_{x_2} \right\} dt \\ &= A \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \left(K \frac{\partial u}{\partial x} A \right)_{x_2} - \left(K \frac{\partial u}{\partial x} A \right)_{x_1} \right\} dt = A \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \end{aligned}$$

棒の側面からの熱の出入りも棒内部での熱の発生も無いとすると,

$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ なので,

$$A \int_{x_1}^{x_2} \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} dt dx = 0$$

これは x_1 , x_2 , t , Δt のとりかたに依存せずに成り立たねばならないから,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ただし, } \kappa (\text{熱拡散係数}) = K / \sigma \rho$$

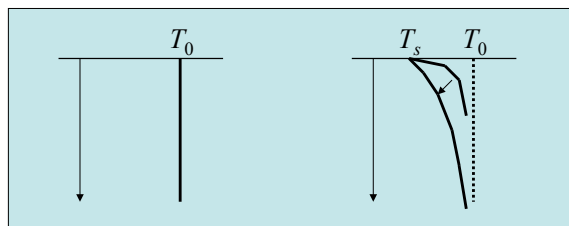
24

1次元熱伝導方程式の解法

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{ただし、} \kappa = \frac{K}{\rho c} \quad \text{----- (1)}$$

これを以下の条件の下に解く。

$$\begin{aligned} t=0, \quad y>0 \quad &\text{で } T=T_0 \\ t>0, \quad y=0 \quad &\text{で } T=T_s \quad \text{----- (2)} \\ t>0, \quad y \rightarrow \infty \quad &\text{で } T \rightarrow T_0 \end{aligned}$$



25

Tの変数変換(無次元化により変数を減らす)

温度 T は、 T_0 や T_s との差が問題になるだけなので、
以下のように変数変換する。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} \quad \text{----- (3)}$$

これを用いると、式(1)は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{----- (4)}$$

式(2)の条件も以下のように、簡単化される

$$\begin{aligned} \theta(y, 0) &= 0 \\ \theta(0, t) &= 1 \quad \text{----- (5)} \\ \theta(\infty, t) &= 0 \end{aligned}$$

26

時間 t と空間 y の相似変数 η の導入

式(1)に長さの次元を持つ量は y の他には $\sqrt{\kappa t}$ しかない。

$\sqrt{\kappa t}$ は characteristic thermal diffusion distance で、

ある y に突然温度変化を与えたとき、
 t 時間後にその変化を感じる距離という意味。

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \quad \text{----- (6)}$$

のように、 y を $\sqrt{\kappa t}$ で規格化することによって式(1)の変数を減らす。

η は similarity variable で、 η の値が等しいなら、温度分布は相似。

27

η を用いた熱伝導方程式の書き換え

式(6)を用いて式(4)の各項を下のように書き換える。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{4} \frac{y}{\sqrt{\kappa t}} \frac{1}{t} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) \quad \text{-- (7)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \quad \text{----- (8)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{4} \frac{1}{\kappa t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad \text{----- (9)}$$

式(7)-(9)を用いれば、式 (4) は以下のように書き換えられる。

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad \text{----- (9)}$$

28

式(9)を解く

$y=0$ は $\eta=0$ に、 $y=\infty$ と $t=0$ は $\eta=\infty$ に対応するので、
式 (5) の条件は、下の 2 つだけになる。

$$\theta(\infty)=0, \theta(0)=1 \quad \text{----- (10)}$$

$$\text{ここで } \phi = \frac{d\theta}{d\eta} \quad \text{----- (11)}$$

と置いて、式(9)を書き換えれば、下式を得る。

$$-\eta\phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad \text{-- (12), or } -\eta d\eta = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{\phi} \quad \text{--- (13)}$$

変数分離形なので、そのまま積分して、

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad \text{----- (14)}$$

書き換えて、

$$\phi = c_1 \exp(-\eta^2) = \frac{d\theta}{d\eta} \quad \text{----- (15)}$$

29

η' をダミー変数として式(15)を積分する。

$$\theta = c_1 \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' + 1 \quad \text{----- (16)}$$

ただし、上記積分定数を決めるのに $\theta(0)=1$ を使った。

$\theta(\infty)=0$ なので、式(16)は

$$0 = c_1 \int_0^\infty \exp(-\eta'^2) d\eta' + 1 \quad \text{----- (17)}$$

を満足しなければならないが、

$$\int_0^\infty \exp(-\eta'^2) d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{----- (18)}$$

なので、 $c_1 = -2/\sqrt{\pi}$ となり、式(16)は

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' \quad \text{----- (19)}$$

となる。

30

誤差関数

式(19)の中の積分は error function (誤差関数) であり、

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta'^2) d\eta' \quad \text{----- (20)}$$

と定義される。この誤差関数を使えば、式(19)は

$$\theta = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta) \quad \text{----- (21)}$$

と書き表される。

なお、右辺の $\text{erfc}(\eta)$ は complementary error function。

式(21)を元の変数で書き直せば、下のようになる。

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad \text{----- (22)}$$

誤差関数は積分不能で、数値積分で求めなければならないが、

$y=0$ で erfc は 1 なので、従って、 $T=T_s$

$y \rightarrow \infty$ または $t=0$ で erfc は 0 なので、 $T=T_0$

31

$y=0$ に突然与えられた温度急変帯を thermal boundary layer と呼ぶ。

この厚さを y_T とし、 $\theta=0.1$ である y と定義しよう。

$\eta_T = \text{erfc}^{-1}(0.1) = 1.16$ なので、式(6)から、このときの y_T は

$$y_T = 2\eta_T \sqrt{\kappa t} = 2.32\sqrt{\kappa t} \quad \text{----- (23)}$$

となる。

$y=0$ からの熱流量 q は

$$\begin{aligned} q &= -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = K(T_s - T_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\text{erf} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right)_{y=0} = \frac{K(T_s - T_0)}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} (\text{erf} \eta)_{\eta=0} \\ &= \frac{K(T_s - T_0)}{2\sqrt{\kappa t}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \right)_{\eta=0} = \frac{K(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa t}} \quad \text{----- (24)} \end{aligned}$$

32

海洋性プレートの冷却

もし、中央海嶺で温度 T_m のマグマが海底まで達し、
即座にその表面は海底の温度 T_s に固定され、
その後速度 u で海嶺から (x 方向に) 遠ざかりつつ冷却されるとする。
この状況には $t = x/u$ 、 $T_0 = T_m$ 、と置き換えれば、
式(22)の解がそのまま使える。
すなわち、

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}}\right)$$

or $\frac{T - T_s}{T_m - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}}\right)$ ----- (25)

33

同様に、式(23)から、下の式を得る。

$$y_T = 2.32\sqrt{\kappa t} = 2.32\sqrt{\kappa x/u} \text{ ----- (26)}$$

さらに、海底からの熱流量は、同様に式(24)から

$$q = \frac{K(T_m - T_s)}{\sqrt{\pi \kappa t}} = \frac{K(T_m - T_s)}{\sqrt{\pi \kappa x/u}} \text{ ----- (27)}$$

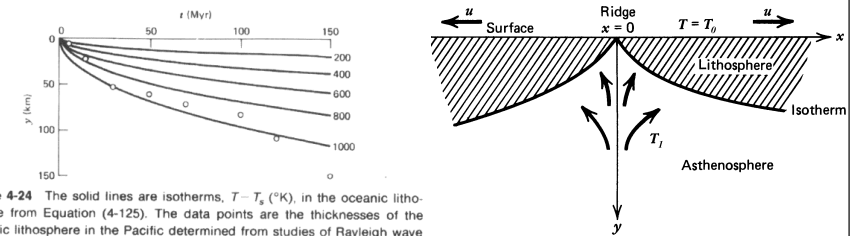


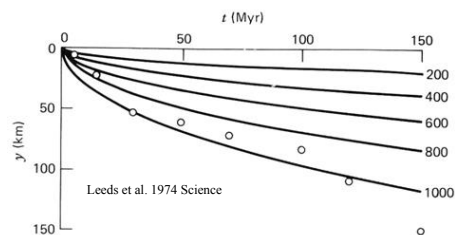
Figure 4-24 The solid lines are isotherms, $T - T_s$ ($^{\circ}\text{K}$), in the oceanic lithosphere from Equation (4-125). The data points are the thicknesses of the oceanic lithosphere in the Pacific determined from studies of Rayleigh wave dispersion data. (From A. R. Leeds, L. Knopoff, and E. G. Kausel, Variations of upper mantle structure under the Pacific Ocean, *Science*, **186**, 141-143, 1974.)

34

実際のデータと比較

海洋リソスフェアの厚さ (y_L) は形成年代のルートに比例する

$$y = 2\eta\sqrt{\kappa t} \quad \theta = \operatorname{erfc}(\eta)$$



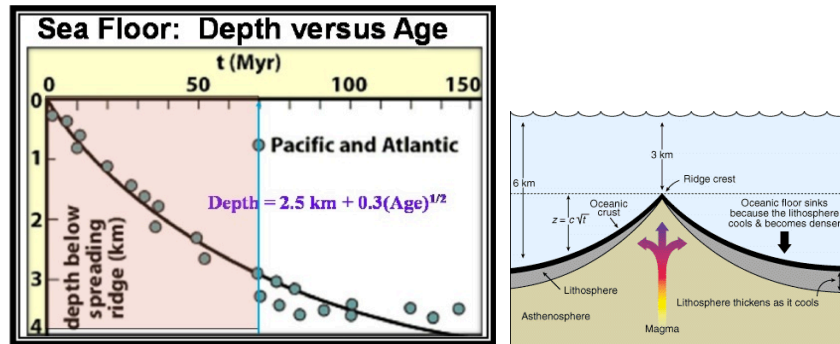
いま、 $\theta = 0.1$ として熱境界層 (海洋プレートの厚さ) を定義すると、 $y_L = 2.3\sqrt{\kappa t}$
仮に、 $\theta = 0.01$ なら熱境界層の厚さはどのように表せるか？

相補誤差関数 $\operatorname{erfc}^{-1}(0.01) = 1.82$ とする

熱境界層の推定

36

海洋底深度と年代 ルート t 則



一億年程度までは \sqrt{t} に従う

37

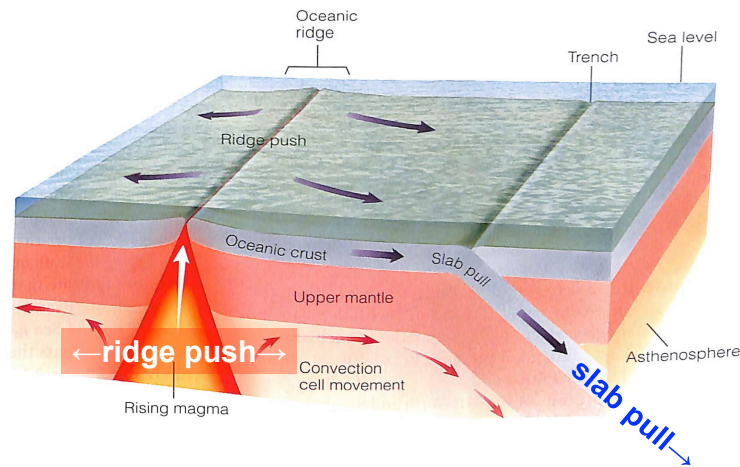
熱伝導方程式からわかること

- 海洋プレートの年齢に伴い、
 - 1) 海洋底は深くなる
 - 2) 熱流量は小さくなる
 - 3) 海洋プレートは厚くなる
 - 4) 地震の発生深さは深くなる

上記4点の変化は全て、年齢 $t^{1/2}$ に依存する
→プレートの成長は冷却の歴史！

38

プレートテクトニクスの駆動力



中央海嶺: 減圧溶融で熱いプレートが生まれ、左右に拡大 (ridge push)
沈み込み帯: 冷却して重くなったプレートが軽い地殻に沈み込む (slab pull)

7回目 課題

- 深海底の水深は年齢とともに、深くなっていくが、年齢と厚さの関係はどのように表されるか？そのように表される理由とともに説明せよ。

40